



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Treball final del  
GRAU DE MATEMÀTIQUES

---

El problema està de dos cossos

---

Autora: Chunwei Ye

Director: Dr. Antoni Benseny Ardiaca  
Realitzat a: Departament de Matemàtiques  
i Informàtica

Barcelona, 27 de juny de 2018

## Abstract

This memory is about the extended problem of two bodies using the physical concepts and the mathematical branches as numerical methods and differential equations. After the reduction of the problem, we analyze the main theoretical part. In the following chapter, based on the results obtained, we will focus on the Kepler problem that studies the behaviors of the orbits in the gravitational case. In the end, with a simulator we can visualize the movement of these two bodies for extended problems.

## Resum

Aquesta memòria tracta el problema estès de dos cossos utilitzant els conceptes físics i les branques matemàtiques com mètodes numèrics i equacions diferencials. Després de la reducció del problema, analitzem la part teòrica principal. En el capítol següent, a partir dels resultats obtinguts, ens centrarem a problema de Kepler que estudia els comportaments de les òrbites en el cas gravitatori. Al final, amb un simulador podem visualitzar el moviment d'aquests dos cossos per a problemes estesos.

# Agraïments

Primer de tot, vull agrair sincerament al meu tutor, Dr. Antoni Benseny. Sense la seva ajuda no hagués pogut realitzar aquest treball. Gràcies pel seu consell a l'hora d'elegir el tema del treball i també per la seva paciència durant el curs. A més a més, m'ha ajudat molt en la correcció ortogràfica.

També vull donar gràcies al Dr. Alex Haro pel seu suport material i per la seva experiència.

Després, volia donar gràcies a la meua família i als meus amics pel suport i la confiança en mi.

Finalment, gràcies a totes les experiències que he tingut durant el grau perquè m'han permès ser capaç de realitzar aquest treball.

# Índex

<b>1</b>	<b>Lleis de la física</b>	<b>2</b>
1.1	Evolució històrica . . . . .	2
1.2	Lleis de Kepler . . . . .	3
1.3	Lleis de Newton . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Problema estès de dos cossos</b>	<b>6</b>
2.1	Reducció al problema estès de Kepler . . . . .	6
2.2	Conservació del moment angular . . . . .	8
2.3	Conservació de l'energia . . . . .	11
2.3.1	Potencial efectiu . . . . .	12
2.3.2	Comportaments de les òrbites . . . . .	13
2.4	Equació diferencial de les òrbites . . . . .	18
2.5	Teorema de Bertrand . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Cas gravitatori</b>	<b>24</b>
3.1	Equació diferencial gravitatòria de les òrbites . . . . .	24
3.2	Geometria de les òrbites . . . . .	25
3.2.1	Forma i equacions en coordenades cartesianes . . . . .	25
3.2.2	Recorregut de l'òrbites el·líptiques . . . . .	31
3.2.3	Equació de Kepler . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Simulació del problema de dos cossos</b>	<b>35</b>
4.1	Descripció del simulador . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>41</b>
<b>6</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>42</b>

# Introducció

Durant segles, els humans han explorat l'Univers. Gràcies als grans astrònoms, físics i matemàtics, podem reconèixer bona part del Cosmos.

Des de la infància, ens van ensenyar que el Sol és el centre del sistema solar i que tots els objectes estan regits per la gravetat del Sol. A més, els planetes estan ubicats en òrbites el·líptiques en gairebé el mateix pla i orbiten al voltant del Sol en la mateixa direcció.

Ens preguntem: per què els planetes es mouen d'aquesta manera en lloc de qualsevol forma caòtica i desordenada? Com són les seves òrbites? Totes són de mateixa forma? I de què depèn el període dels planetes?

A fi de trobar les respostes de les preguntes anteriors, en aquest treball tractarem el moviment de dos cossos assumint que no són afectats per altres forces que no siguin la interacció mútua amb forces atractives proporcionals a  $r^\alpha$ , on  $r$  és la distància mútua i  $\alpha$  un exponent. Es tracta d'una extensió del cas gravitatòri que té lloc per a  $\alpha = -2$ .

Aquesta memòria té quatre capítols principals, els tres primers estan vinculats a la part teòrica i l'últim, a la part pràctica.

Primer de tot, explica breument l'evolució històrica de l'Astronomia i fa un repàs sobre les lleis de Kepler i les lleis de Newton.

En el capítol següent, introdueix els conceptes bàsics que serveixen per a la reducció del problema de dos cossos estès a un problema d'un únic cos. Més tard, amb les dues lleis de conservació importants, dedueix l'equació diferencial de les òrbites en coordenades polars i tracta el teorema de Bertrand.

Més endavant, es concentra al cas gravitatori. Estudia els comportaments de les òrbites en coordenades cartesianes segons els valors de l'excentricitat. Després s'enfoca a les òrbites el·líptiques i a l'equació de Kepler.

Finalment, explica el funcionament d'un simulador d'òrbites del problema estès.

# 1 Lleis de la física

## 1.1 Evolució històrica

Abans de la invenció del telescopi, l'Astronomia només comprenia l'observació i predicció del moviment dels objectes que podien ser observats a simple vista.

Des de molt aviat, els astrònoms grecs van proposar el model geocèntric que va considerar la Terra com el centre de l'Univers, i que el Sol, els planetes i les estrelles giraven al seu voltant.

Aquest model va culminar al segle II dC en el model de Claudi Ptolemeu. Creia que la Terra estava immòbil i els planetes descriuen trajectòries circulars respecte a la Terra. Les seves teories van tenir gran èxit i van influir en el pensament d'astrònoms i matemàtics fins al segle XVI.

En el Renaixement, Nicolau Copèrnic va proposar el model heliocèntric en el qual la Terra feia una òrbita circular al voltant del Sol. Aquest nou model explicava de forma més simple les irregularitats dels planetes. Però inicialment aquest model no s'acceptà per complet, atès que les dades obtingudes empíricament afavorien el model de Ptolomeu.

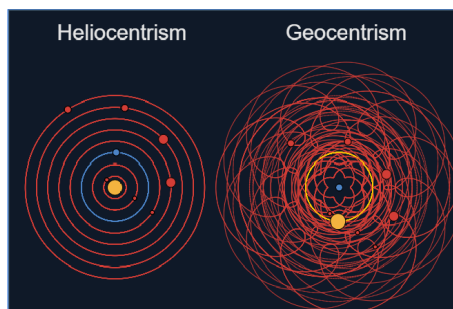


Figura 1: Heliocèntric vs Geocèntric

L'any 1610, Galileu va construir un telescopi i l'enfocà al firmament. Per a les seves explicacions, va adoptar el model heliocèntric, però va seguir suposant òrbites circulars per als planetes.

L'astrònom danès Tycho Brahe va proposar un model geoheliocèntric que és una transició entre la teoria geocèntrica de Ptolomeu i la teoria heliocèntrica de Copèrnic. Va considerar el Sol i la Lluna giraven al voltant de la Terra immòbil, mentre que altres giraven al voltant del Sol. A més, Brahe pensava que les òrbites en realitat eren el·lipses.

Durant el segle XVII, Johannes Kepler va publicar les seves tres famoses lleis, basades en les observacions de Brahe. Però malgrat els seus esforços, no va ser capaç de definir les equacions de les trajectòries el·líptiques.

Més tard, Newton va aplicar les seves lleis de la dinàmica a l'estudi dels fenòmens naturals. Va descobrir l'existència d'una força, anomenada gravetat, que empeny un objecte massiu cap al centre d'un altre de més massiu. Posteriorment, les lleis de Kepler van explicar-se a partir de la llei de la gravitació universal de Newton i de les lleis de la dinàmica.

## 1.2 Lleis de Kepler

Johannes Kepler va resumir els seus resultats astronòmics en tres lleis empíriques per descriure el moviment dels planetes en les seves òrbites al voltant del Sol. Aquestes lleis constitueixen la cinemàtica del moviment planetari.

- **Primera llei**

*Tots els planetes descriuen òrbites el·líptiques al voltant del Sol, situat en un dels seus focus.*

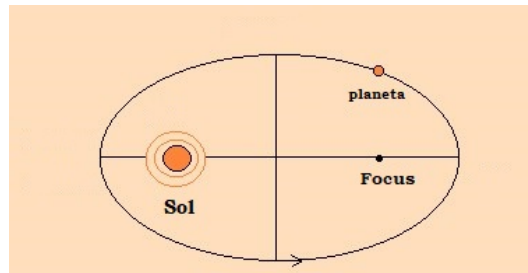


Figura 2: Moviment d'un planeta al voltant del Sol

- **Segona llei**

*El radi vector que uneix el planeta amb el Sol escombra àrees iguals en temps iguals, de tal manera que la velocitat areolar és constant.*

$$\frac{dA}{dt} = K$$

on  $A \equiv$  àrea escombrada,  $t \equiv$  temps i  $K \equiv$  velocitat areolar

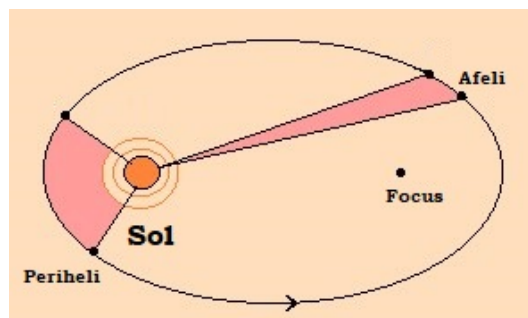


Figura 3: Llei d'àrees de Kepler

Així, els planetes es desplacen més ràpidament quan estiguin més propers al Sol (periheli) que quan estiguin més allunyats (afeli).

- **Tercera llei**

*Per a tot planeta, el quadrat de seu període orbital  $T$  és directament proporcional al cub del semieix major  $a$  de la seva òrbita el·líptica.*

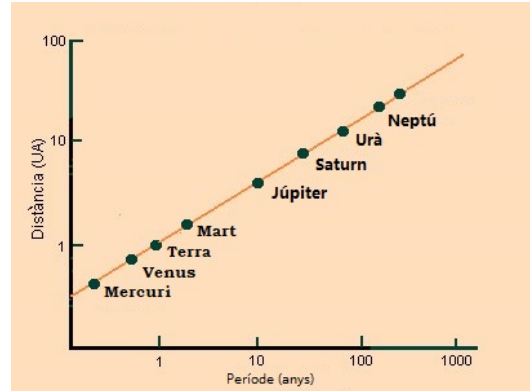


Figura 4:  $UA \equiv$  unitats astronòmiques

### 1.3 Lleis de Newton

Isaac Newton va formular les lleis que descriuen les causes i les formes de moviment dels cossos, també va enunciar la llei de la gravitació universal per explicar la força d'atracció entre dos cossos. Constitueixen la dinàmica del moviment planetari i van permetre explicar la seva cinemàtica.

- **Principi d'inèrcia**

*Si sobre un cos no actua cap força, aleshores manté el seu estat de moviment, ja sigui en repòs, o ja sigui en moviment rectilini uniforme (M.R.U).*

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = C_1 \longrightarrow \begin{cases} \vec{v} = 0 \text{ (repòs)} & \text{si } \vec{v}_0 = 0 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 = C_2 \text{ (M.R.U)} & \text{si } \vec{v}_0 \neq 0 \end{cases}$$

amb  $\vec{F} \equiv$  força,  $\vec{v} \equiv$  velocitat,  $\vec{v}_0 \equiv$  velocitat inicial, i  $C_1, C_2 \equiv$  constants.

**Definició 1.1.** *La quantitat de moviment o moment lineal ( $\vec{P}$ ) d'un cos és el producte de la seva massa  $m$  per la seva velocitat lineal  $\vec{v}$  mesurades en un determinant sistema de referència. La seva definició matemàtica és*

$$\vec{P} = m\vec{v}$$



- **Llei fonamental de la dinàmica**

*La variació de la quantitat de moviment  $\vec{P}$  respecte al temps  $t$  d'un cos és igual a la força  $\vec{F}$  que actua.*

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \quad , \quad \text{on } \vec{a} \equiv \text{acceleració}$$

- **Llei d'acció i reacció**

*Sempre que un cos exerceix una força sobre un altre, aquest segon cos exerceix una força de mòdul igual però sentit contrari sobre el primer.*

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad , \quad \vec{F}_{ij} \text{ és la força que fa el cos } i \text{ sobre el } j$$

- **Llei de gravitació universal**

*La força d'atracció  $F$  entre dos cossos, amb masses  $m_1$  i  $m_2$  respectivament, és proporcional al producte de les masses i inversament proporcional al quadrat de la distància  $r$  que separa els dos cossos.*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

on  $G$  és la constant gravitacional i val  $(6.6742 \pm 0.001) \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$

## 2 Problema estès de dos cossos

El problema de dos cossos es refereix a la interacció de dues masses en moviment sota l'acció mútua de la gravetat descrita per la llei de la gravitació universal de Newton. Newton pensava que la gravetat radiava igualment en totes les direccions del cos central i havia de complir la llei de l'invers del quadrat.

A part de la força gravitacional, també és interessant conèixer els comportaments en problemes estesos a forces atractives depenents de la distància  $r$ , del tipus

$$F = kr^\alpha$$

on  $k$  és una constant i  $\alpha$  és un exponent. Notem que quan  $\alpha = -2$  tenim el cas gravitatori.

### 2.1 Reducció al problema estès de Kepler

El nostre objectiu és determinar el moviment de dues partícules puntuals que només interactuen entre sí. Les lleis de Newton ens permeten reduir el problema dels dos cossos a un problema d'un únic cos. És a dir, resoldre el moviment d'una partícula sotmesa a un camp gravitatori conservatiu i que, per tant, deriva d'un potencial extern.

Primer de tot, anem a introduir els conceptes importants que ens serveixen per reduir el problema.

### Moviment del centre de masses

**Definició 2.1.** *El centre de massa o baricentre es pot considerar com la mitjana de la ubicació de totes les masses d'un sistema. En el cas discret, es troba en la mitjana de les posicions  $\vec{r}_i$  de les partícules ponderada per les seves masses  $m_i$ , i s'expressa com*

$$\vec{R} = \sum_{i=0}^n \frac{m_i \vec{r}_i}{m_1 + \dots + m_n}$$

En el cas de dos cossos, sigui  $M := m_1 + m_2$  la massa total, aleshores

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \quad (2.1)$$

**Observació 2.2.** Aplicant la llei d'acció i reacció de Newton a la derivada segona respecte el temps de l'equació anterior, obtenim que

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{1}{M} \left( m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \right) = \frac{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}{M} = 0$$

Mostra com la velocitat del centre de masses és constant, d'on s'extreu que la quantitat de moviment del sistema també es conserva. Per tant, la posició  $\vec{R}$  del centre de masses pot ser determinada en qualsevol instant de temps a partir de les posicions i velocitats inicials.

## Moviment del vector relatiu

Ara definim el vector relatiu entre les dues masses com  $\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Segons les lleis de Newton, tindrem una equació de la manera que

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}$$

Observem que aquesta equació pot escriure's com

$$\vec{F}(r) = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}$$

on  $m$  és la massa reduïda i té la forma

$$m := \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

.

## Moviment de les dues masses

Substituint la relació entre  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$  a l'equació (2.1), obtenim que

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Encara podem reduir més el problema escollint la posició del centre de masses com l'origen de les coordenades, és a dir,  $\vec{R} = 0$ .

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (2.2)$$

**Observació 2.3.** En el cas de que la massa  $m_1$  d'un dels cossos sigui molt més gran que la massa  $m_2$  de l'altre ( $m_1 \gg m_2$ ), aleshores

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_1 = 0 \quad , \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_2 = \vec{r}$$

Com que les posicions  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$ , de les masses  $m_1$  i  $m_2$  respectivament, es poden deduir a partir del vector relatiu  $\vec{r}$ , l'anàlisi del problema de dos cossos ha reduït a l'anàlisi d'un problema simplificat amb el vector relatiu  $\vec{r}$ , la massa total  $M$  i la massa reduïda  $m$ .

En el cas gravitatori, aquest problema resultant és el denominat *problema de Kepler* i segons la llei de gravitació universal la força es pot expressar com

$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

en què  $\vec{e}_r$  és el vector unitari en la direcció radial.

Com s'ha mencionat al principi del capítol, considerarem el *problema estès de Kepler* amb forces del tipus

$$\vec{F}(r) = -F(r)\vec{e}_r = -kr^\alpha \vec{e}_r$$

**Observació 2.4.** Degut a que la força en la direcció radial  $\vec{e}_r$  i la seva magnitud només depèn de distància  $r$  a l'origen, direm que és una força central. Es verifiquen les propietats següents:

1.  $\vec{F}(r)$  sempre és conservativa.
2.  $\nabla \times \vec{F}(r) = 0$  (el seu rotacional és nul)
3.  $\vec{F}(r) = -\nabla V(r)$  (és el gradient del seu potencial amb signe canviat)

Per tant, considerem el potencial en forma general

$$V(r) = \begin{cases} \frac{k(r^{\alpha+1}-1)}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ k \ln r & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

En particular, si  $\alpha = -2$ , tenim que

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

## 2.2 Conservació del moment angular

**Definició 2.5.** En mecànica newtoniana, el moment angular  $\vec{L}$  d'una partícula respecte a l'origen es defineix com el moment de la seva quantitat de moviment  $\vec{P}$ .

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

**Teorema 2.6.** La variació del moment angular d'un sistema material respecte al temps és igual al moment total de les forces que actuen.

*Demostració.*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} =: \vec{N}$$

□

**Teorema 2.7.** (Llei de conservació del moment angular) En els camps de forces centrals, el moment angular es conserva.

*Demostració.* En un camp central, la força  $\vec{F}$  és paral·lela al vector de posició  $\vec{r}$ , aleshores

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \implies \vec{L} = \text{constant}$$

□

Per tant, el cos es mou en un pla, ja que el vector de desplaçament  $\vec{r}$  i el vector de velocitat  $\vec{v}$  sempre es troben en el pla perpendicular al vector constant  $\vec{L}$ .

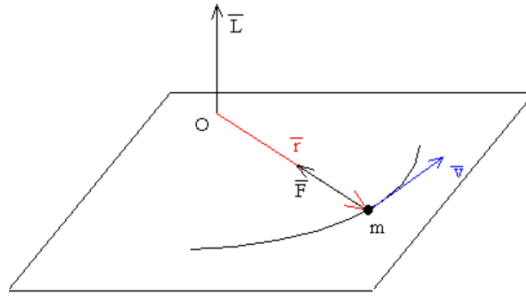


Figura 5: Moment angular en un camp central

## Coordenades polars

**Definició 2.8.** *El sistema de coordenades polars és un sistema de coordenades de dues dimensions en el qual cada punt ve determinat per la coordenada radial segons  $\vec{e}_r$  i la coordenada angular segons  $\vec{e}_\theta$ .*

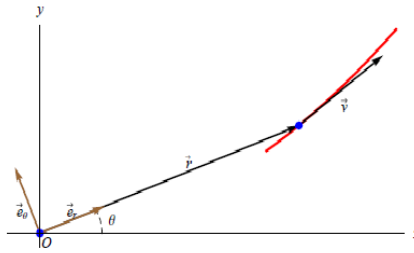


Figura 6: Relació entre les coordenades

**Observació 2.9.** Segons la Figura 6, podem trobar les relacions entre les coordenades cartesianes i polars.

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad , \quad \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

i observem que

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y = \vec{e}_\theta \quad , \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y = -\vec{e}_r$$

La llei de conservació del moment angular va ser primer descoberta per Kepler a través de l'observació del moviment de Mart. Kepler va formular aquesta llei d'una manera lleugerament diferent.

Com que el moviment es realitza en un pla i la força  $\vec{F}(r)$  només depèn de la coordenada radial  $r$  i té direcció radial  $\vec{e}_r$ , aleshores és útil treballar amb les coordenades polars.

Amb les observacions anteriors, rescrivim els vectors en coordenades polars

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta - r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r \\ &= \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \vec{e}_r + \left( 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Degut a que la força només té la component radial, i l'acceleració  $\vec{a}$  és paral·lela a la força, tenim l'equació diferencial angular:

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad (2.5)$$

**Observació 2.10.** Observem que

$$\begin{aligned} L &= |\vec{r} \times m\vec{v}| = m \left| r\vec{e}_r \times \left( \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \right) \right| = mr^2\frac{d\theta}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L^2}{mr^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Segons l'equació diferencial angular i usant la regla de la cadena, obtenim

$$0 = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) \implies \frac{dL}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

Per tant, el cos es mou al pla en òrbites en què el moment angular  $\vec{L}$  sempre té el mòdul constant.

**Observació 2.11.** Kepler va formular la llei que l'àrea  $A(t)$  era escombrada pel radi vector amb una velocitat areolar constant  $K$ . Aquesta es pot deduir de la llei de conservació del moment angular.

Segons la Figura 7, donat  $\vec{r}$  i  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$  les posicions del planeta respecte al Sol als instants  $t$  i  $t + \Delta t$  respectivament. L'àrea escombrada  $\Delta A$  pel radi vector en l'interval  $\Delta t$  és aproximada per

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}| \implies 2\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \left| \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right|$$

Passant al límit quan  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtenim que

$$\begin{aligned} 2\frac{dA}{dt} &= \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = | \vec{r} \times \vec{v} | = \frac{L}{m} \\ \Rightarrow K &= \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'observació anterior mostra que la velocitat areolar  $K$  és invariant.

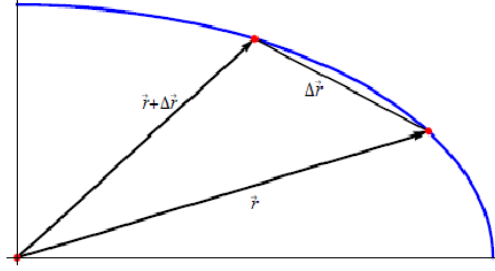


Figura 7: Àrea escobrada en un interval de temps

## 2.3 Conservació de l'energia

La llei de la conservació de l'energia afirma que la quantitat total d'energia es manté constant al llarg de temps a qualsevol sistema aïllat.

Aplicant la llei fonamental de Newton i la propietat de la força central a la derivada respecte al temps de l'energia total  $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$ , obtenim que

$$\frac{dE}{dt} = mva + \frac{dV(r)}{dt} = vma + \frac{dV(r)}{dr} \frac{dr}{dt} = vF - Fv = 0$$

Així, l'energia total del sistema és constant.

**Observació 2.12.** Si substituïm les equacions (2.3) i (2.6) a la de l'energia total, obtenim una nova equació

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + V(r) = \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right] + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{eff}(r) \end{aligned} \quad (2.8)$$

on  $V_{eff}(r) := \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$  és el potencial efectiu.

### 2.3.1 Potencial efectiu

El potencial efectiu es defineix com la suma de l'energia potencial centrífuga i l'energia potencial d'un sistema dinàmic. Notem que  $V_{eff}$  només depèn de la distància entre els dos cossos, és a dir, de  $r$ . Per tant, ens permet la reducció del nombre de dimensions del problema.

**Observació 2.13.** Sigui  $E$  l'energia total.

Com que  $E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{eff}(r)$  i  $\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \geq 0$ , per a cada valor  $E$  de l'energia, el moviment es produeix a la regió delimitada per la desigualtat  $V_{eff}(r) \leq E$ .

Per tant, no hi ha moviment quan l'energia del sistema és menor que la del mínim del potencial efectiu.

La desigualtat dóna regions anulars del pla

$$0 \leq r_{min} \leq r \leq r_{max} \leq \infty$$

Si  $0 \leq r_{min} \leq r \leq r_{max} < \infty$ , aleshores el moviment està fitat i té lloc a l'interior de l'anell entre els cercles de radi  $r_{min}$  i  $r_{max}$ .

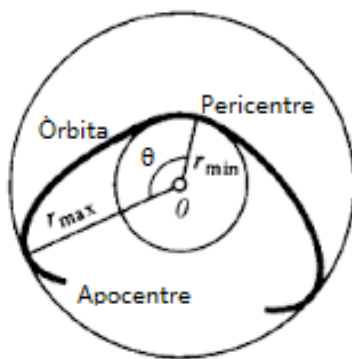


Figura 8: Òrbita d'un punt en un camp central

La forma de l'òrbita es mostra en la Figura 8. L'angle  $\theta$  varia de forma monòtona mentre  $r$  oscil·la entre  $r_{min}$  i  $r_{max}$ . Els punts on  $r = r_{min}$  es diuen pericentres i, on  $r = r_{max}$ , apocentres.

Cadascun dels raigs que parteixen del centre a l'apocentre o al pericentre és un eix de simetria de l'òrbita.

En general, l'òrbita no és tancada: l'angle entre els pericentres i apocentres successius ve donat per la integral següent, obtinguda segons les equacions (2.6) i (2.8).

$$\theta = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2(E - V_{eff}(r))}} dr$$

L'òrbita és tancada si l'angle  $\theta$  és commensurable amb  $2\pi$ , això és, si  $\theta = 2\pi(\frac{m}{n})$  amb  $m$  i  $n$  enters. Si l'angle  $\theta$  no és commensurable amb  $2\pi$ , aleshores l'òrbita és densa en totes les parts de l'anell.



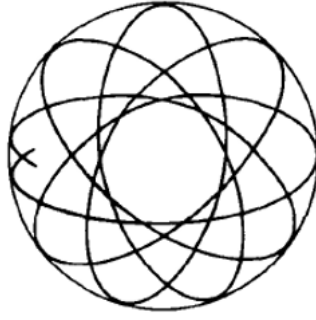


Figura 9: Orbital dens en un anell

Observem que en el límit d'aquesta regió,  $r_{min} = r_{max}$ , això és,  $E = V_{eff}$  en un punt mínim, l'anell degenera en una circumferència.

Encara en aquest cas  $\frac{dr}{dt} = 0$ , però en general la velocitat del punt en moviment no és igual a zero ja que  $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$  per  $L \neq 0$ .

Finalment si  $r_{max} = \infty$ , aleshores l'òrbita no està fitada. Una partícula pot venir de l'infinit, xocar contra la barrera centrífuga repulsiva del potencial al seu  $r_{min}$ , ser repel·lida i tornar a allunyar-se infinitament.

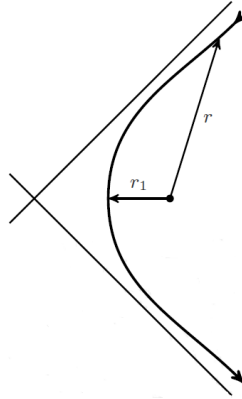


Figura 10: Moviment ilimitat

### 2.3.2 Comportaments de les òrbites

Ara estudiem gràficament la regió permesa per a cada valor d' $E$  i les seves conseqüències en la forma de les òrbites segons els diferents valors de  $\alpha$ .

A fi de simplificació, considerem  $k = 1$ .

## Moment angular no nul

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad , \quad \text{amb } V(r) = \begin{cases} \frac{r^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln r & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

**Observació 2.14.** Si  $r$  és proper a 0,  $V_{eff}(r)$  està dominat pel terme  $\frac{L^2}{2mr^2}$ , aleshores  $V_{eff}(r)$  és positiva i amb pendent decreixent.

En canvi, si  $r$  prou gran,  $V_{eff}(r)$  té el mateix comportament que  $V(r)$ .

Observem que  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{L^2}{2mr^2} = +\infty$ .

- $\alpha < -1 \Rightarrow \alpha + 1 < 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = -\frac{1}{\alpha+1} > 0$   
aleshores el potencial efectiu  $V_{eff}(r)$  té la forma següent

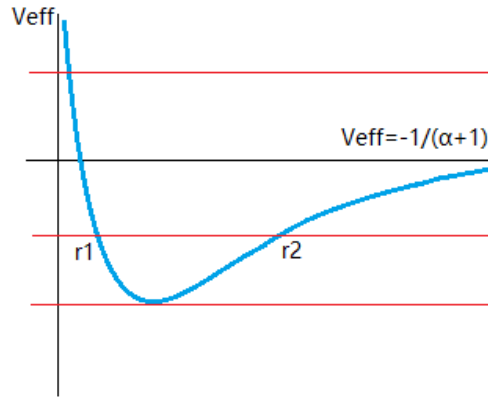


Figura 11: Gràfica de  $V_{eff}$  amb  $L \neq 0$  i  $\alpha < -1$

- Quan  $E$  correspon al mínim del potencial efectiu, els dos límits coincideixen, de la manera que el moviment només és possible per a un radi i l'òrbita és circular.
- Si  $E < -\frac{1}{\alpha+1}$ , aleshores existeixen el límit inferior  $r_1$  i el superior  $r_2$ . Les òrbites estan fitades i contingudes entre les dues circumferències de radis  $r_1$  i  $r_2$  amb punts d'inversió que es troben sempre en aquestes circumferències.
- Sigui  $E \geq -\frac{1}{\alpha+1}$ , no existeix límit superior pels valors possibles de  $r$ , així que el cos es pot escapar a l'infinit.

- $\alpha = -1 \Rightarrow V(r) = \ln r \Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = +\infty$

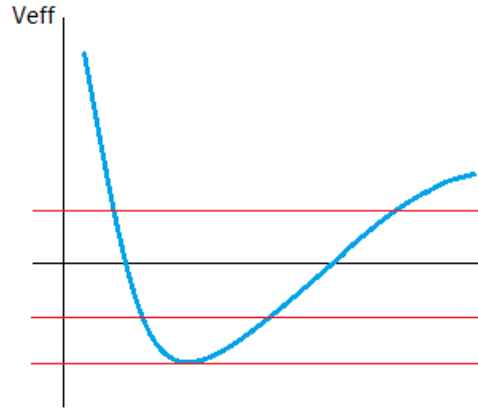


Figura 12: Gràfica del  $V_{eff}$  amb  $L \neq 0$  i  $\alpha = -1$

Observem que  $V_{eff}$  no està fitat superiorment pels dos costats, aleshores només tenim dos cassos d'energies

- Amb l'energia mínim  $E_{min} = V_{eff_{min}}$  tenim una òrbita circular.
- Per les energies superiors a  $E_{min}$ , tenim òrbites fitades pel radi mínim i màxim.

- $\alpha > -1 \Rightarrow \alpha + 1 > 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = +\infty$

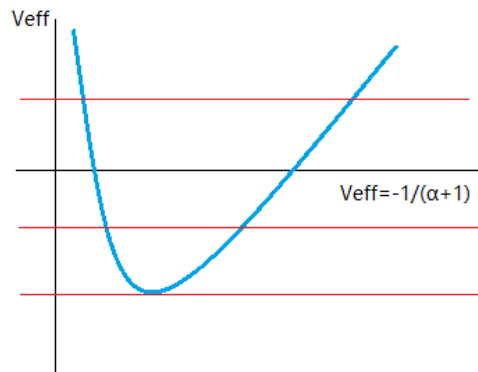


Figura 13: Gràfica del  $V_{eff}$  amb  $L \neq 0$  i  $\alpha > -1$

Com el cas anterior, per qualsevol nivell d'energia el moviment sempre està fitat, per tant el cos no es pot escapar del sistema.

## Moment angular nul

Sigui  $L = 0$ , aleshores

$$V_{eff}(r) = V(r) = \begin{cases} \frac{r^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln r & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

- $\alpha < -1 \implies \alpha + 1 < 0 \implies \lim_{r \rightarrow 0} V(r) = -\infty$ ,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = -\frac{1}{\alpha+1} > 0$

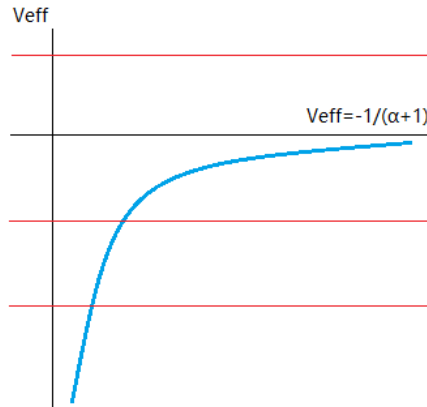


Figura 14: Gràfica del  $V_{eff}$  amb  $L = 0$  i  $\alpha < -1$

- Sigui  $E < -\frac{1}{\alpha+1}$ , el cos s'allunyarà del focus fins a una distància màxima i després recorrerà la mateixa trajectòria en sentit contrari fins a col·lisionar. Aquest recorregut es repetirà infinitament, tret que se li doti al cos d'energia fins que l'energia sigui nul·la.
- Per totes les energies  $E \geq -\frac{1}{\alpha+1}$ , hi ha escapament.
- $\alpha = -1 \implies V(r) = \ln r \implies \lim_{r \rightarrow 0} V(r) = -\infty$ ,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = +\infty$

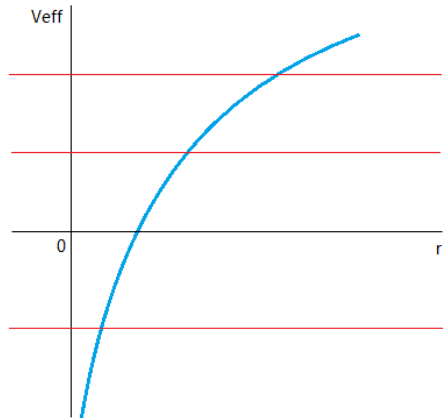


Figura 15: Gràfica del  $V_{eff}$  amb  $L = 0$  i  $\alpha = -1$

Observem que per tot el nivell d'energia hi haurà col·lisió i el cos mai podrà escapar.

- $\alpha > -1 \implies \alpha + 1 > 0 \implies \lim_{r \rightarrow 0} V(r) = -\frac{1}{\alpha+1} < 0$  ,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = +\infty$

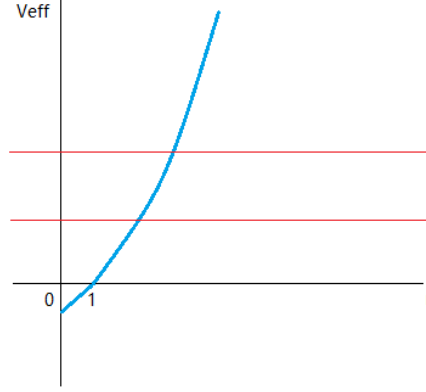


Figura 16: Gràfica del  $V_{eff}$  amb  $L = 0$  i  $\alpha > -1$

En aquest cas, per cada nivell d'energia  $E \geq V_{eff}$ , el cos xocarà infinites vegades, després de topar el cos s'allunyarà de nou fins a arribar el radi màxim per tornar a col·lisionar.

## Conclusions

- $L \neq 0$ 
  - Les òrbites seran fitades quan  $\alpha \geq -1$  o,  $\alpha < -1$  i  $E < -\frac{1}{\alpha+1}$ .
  - Les òrbites no seran fitades si  $\alpha < -1$  i  $E \geq -\frac{1}{\alpha+1}$ .
- $L = 0$ 
  - Hi haurà col·lisió, sense fugida si  $\alpha \geq -1$  o,  $\alpha < -1$  i  $E < \frac{1}{\alpha+1}$ .
  - El cos escaparà a l'infinit si  $\alpha < -1$  i  $E \geq -\frac{1}{\alpha+1}$ .

## 2.4 Equació diferencial de les òrbites

Ja hem vist els comportaments de l'energia del sistema. Per conèixer el moviment dels cossos també és necessari estudiar la forma de les seves equacions orbitals. Amb la combinació de les equacions (2.4), (2.5) i (2.6), obtindrem que

$$\vec{a} = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{e}_r = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{m^2 r^3} \right) \vec{e}_r$$

i com que  $\vec{F} = m\vec{a} = -kr^\alpha \vec{e}_r$ , doncs resulta l'equació diferencial radial

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} = -kr^\alpha \quad (2.9)$$

Ara expressem la posició en funció de l'angle tal que  $r = r(\theta)$ , i calculem les seves derivades respecte al temps

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta}$$

Observem que

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{1}{m^2 r^4} \left( Lmr^2 \frac{d^2 r}{d\theta^2} - 2Lmr \frac{dr}{d\theta} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{L}{mr^4} \left[ r^2 \frac{d^2 r}{d\theta^2} - 2r \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{L^2}{m^2 r^4} \left[ \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]$$

Aïllem  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  de l'equació diferencial radial i l'igualem amb l'equació anterior

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{k}{m} r^\alpha = \frac{L^2}{m^2 r^4} \left[ \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{m^2 r^4}{L^2} \left( \frac{L^2}{mr^3} - \frac{k}{m} r^\alpha \right) &= \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \\ -\frac{km}{L^2} r^{\alpha+4} &= \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \end{aligned}$$

Fent el canvi de variable  $u = \frac{1}{r}$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - 2 \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 u - \frac{1}{u} &= -\frac{km}{L^2} \frac{1}{u^{\alpha+4}} \\ \frac{d^2 r}{d\theta^2} u^{\alpha+4} - 2 \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 u^{\alpha+5} - u^{\alpha+3} &= -\frac{km}{L^2} \end{aligned}$$

**Observació 2.15.** Com que  $r = \frac{1}{u}$ , aleshores

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \quad , \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{1}{u^4} \left[ -u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] = \frac{1}{u^3} \left[ 2 \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 - u \frac{d^2u}{d\theta^2} \right]$$

Substituïm  $\frac{dr}{d\theta}$  i  $\frac{d^2r}{d\theta^2}$  a l'equació anterior, obtenim

$$\begin{aligned} u^{\alpha+1} \left[ 2 \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 - u \frac{d^2u}{d\theta^2} \right] - \frac{2}{u^4} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 u^{\alpha+5} - u^{\alpha+3} &= -\frac{km}{L^2} \\ -u^{\alpha+2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - u^{\alpha+3} &= -\frac{km}{L^2} \\ -u^{\alpha+2} \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) &= -\frac{km}{L^2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Com que la solució depèn del paràmetre  $\alpha$ , no podem continuar treballant més. A més, no totes les equacions són resolubles.

## 2.5 Teorema de Bertrand

**Teorema 2.16.** (*Teorema de Bertrand*) Entre els potencials de forces centrals amb òrbites estables, només hi han dos tipus amb la propietat de que totes les òrbites que produeixen són tancades. Aquests dos són

1. El potencial gravitatori o electrostàtic

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

2. El potencial de l'oscil·lador harmònic simple

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

**Observació 2.17.** Sigui  $F(r) = kr^\alpha$ . Definim una funció  $f$  com

$$f(u) = \frac{k}{u^\alpha}$$

A partir del canvi de variable  $r = \frac{1}{u}$ , observem que

$$f(u) = F\left(\frac{1}{u}\right)$$

Amb la definició de  $f$ , l'equació (2.10) es transforma en

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{L^2u^2}f(u)$$

Definint  $J(u) := \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u$ , aleshores tenim que

$$J(u) = \frac{m}{L^2 u^2} f(u) \quad (2.11)$$

**Observació 2.18.** Per tenir una òrbita circular, és a dir,  $r = r_0$ , cal complir

$$r = \text{constant}, \forall \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{d^2 u}{d\theta^2} = 0$$

de manera que

$$J(u_0) = \frac{m}{L^2 u_0^2} f(u_0) = u_0, \quad \text{amb } u_0 = \frac{1}{r_0} \quad (2.12)$$

Si l'energia varia en un entorn de la condició d'òrbita circular, aleshores es manté l'òrbita tancada i la pertorbació respecte  $u_0$  és molt petita, de tal forma que podem expandir la funció  $J(u)$  en una sèrie de Taylor

$$J(u) = u_0 + \eta \frac{dJ(u_0)}{du} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{d^2 J(u_0)}{du^2} + O(\eta^3)$$

on  $\eta$  es defineix com  $\eta := u - u_0$  i  $\frac{d^i J(u_0)}{du^i}$  és la derivada  $i$ -èsima de  $J(u)$  respecte el variable  $u$  valorada en  $u_0$ .

Per a la definició de  $J(u)$  i a la relació de  $\eta$  amb  $u$ , l'equació anterior es converteix en

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} + \eta = \eta \frac{dJ(u_0)}{du} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{d^2 J(u_0)}{du^2} + \frac{1}{6} \eta^3 \frac{d^3 J(u_0)}{du^3} + O(\eta^4)$$

Sigui  $\beta^2 := 1 - \frac{dJ(u_0)}{du}$ , aleshores

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} + \beta^2 \eta = \frac{1}{2} \eta^2 \frac{d^2 J(u_0)}{du^2}(u_0) + \frac{1}{6} \eta^3 \frac{d^3 J(u_0)}{du^3} + O(\eta^4) \quad (2.13)$$

Ara, derivem l'equació (2.11) de  $J(u)$  respecte  $u$ , obtenim que

$$\frac{dJ}{du} = -2 \frac{m}{L^2 u^3} f + \frac{m}{L^2 u^2} \frac{df}{du}$$

Valorant aquesta equació en  $u_0$  i per a l'equació (2.12), resulta:

$$\frac{dJ(u_0)}{du} = -2 \frac{J(u_0)}{u_0} + \frac{m}{L^2 u_0^2} \frac{df(u_0)}{du} = -2 + \frac{m}{L^2 u_0^2} \frac{df(u_0)}{du}$$

on  $\frac{df(u_0)}{du}$  és la derivada de  $f$  respecte  $u$  valorada en  $u_0$ .

Per a la relació de  $\beta^2$  amb  $\frac{dJ(u_0)}{du}$ , tenim que

$$-2 + \frac{m}{L^2 u_0^2} \frac{df(u_0)}{du} = 1 - \beta^2$$



Segons la relació de  $r$  amb  $u$  i la de  $f$  amb  $F$ , es té:

$$\frac{df(u_0)}{du} = \frac{df(u_0)}{dr} \frac{dr}{du} = -r_0^2 \frac{df(u_0)}{dr} = -r_0^2 \frac{dF(r_0)}{dr}$$

on  $\frac{dF(r_0)}{dr}$  és la derivada de  $F$  respecte  $r$  valorada en  $r_0$ .

Substituint a l'equació anterior, tenim

$$\begin{aligned} -2 - \frac{mr_0^2}{L^2} r_0^2 \frac{dF(r_0)}{dr} &= 1 - \beta^2 \\ \frac{mr_0^4}{L^2} \frac{dF(r_0)}{dr} &= \beta^2 - 3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Per l'equació (2.12), podem trobar la relació següent:

$$\frac{mr_0^2}{L^2} F(r_0) = \frac{1}{r_0}$$

Per tant, l'equació (2.14) es pot expressar com

$$\frac{dF(r_0)}{dr} = (\beta^2 - 3) \frac{F(r_0)}{r_0}$$

Com  $r_0$  és qualsevol, aleshores

$$\frac{dF}{dr} = (\beta^2 - 3) \frac{F}{r}$$

La solució d'aquesta equació diferencial és

$$\begin{aligned} \ln F &= \ln(kr^{\beta^2-3}) \\ F(r) &= \frac{k}{r^{3-\beta^2}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

D'aquesta manera obtenim que

$$J(u) = \frac{mk}{L^2} u^{1-\beta^2} \quad (2.16)$$

**Observació 2.19.** La solució homogènia de l'equació (2.13) és

$$\eta(\theta) = h_1 \cos(\beta\theta)$$

Podem considerar la solució anterior com un terme d'una expansió de Fourier de  $\eta$ , per la qual cosa considerant més termes obtindrem la solució de l'equació general de l'òrbita. Per tant,  $\eta$  es pot expressar com

$$\eta(\theta) = h_0 + h_1 \cos(\beta\theta) + h_2 \cos(2\beta\theta) + h_3 \cos(3\beta\theta) + \dots$$

amb  $h_0$  i  $h_2$  són d'ordre  $h_1^2$  i,  $h_3$  d'ordre  $h_1^3$ .

Com que el coeficient de l'element d'alta freqüència és massa petit, a partir d'ara considerem el  $\eta$  fins al terme  $h_3$  i l'equació (2.13) fins a l'ordre  $\eta^3$ .

Calculem la derivada segona de  $\eta$  respecte  $\theta$  de manera que

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} = -\beta^2 h_1 \cos(\beta\theta) - 4\beta^2 h_2 \cos(2\beta\theta) - 9\beta^2 h_3 \cos(3\beta\theta)$$

Substituint l'equació de  $\eta$  i de la seva deriva segona a l'equació (2.13), obtenim que

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \beta^2\eta &= \beta^2 h_0 - 3\beta^2 h_2 \cos(2\beta\theta) - 8\beta^2 h_3 \cos(3\beta\theta) \\ &= \frac{1}{2}(h_0 + h_1 \cos(\beta\theta) + h_2 \cos(2\beta\theta) + h_3 \cos(3\beta\theta))^2 \frac{d^2 J(u_0)}{du^2} \\ &\quad + \frac{1}{6}(h_0 + h_1 \cos(\beta\theta) + h_2 \cos(2\beta\theta) + h_3 \cos(3\beta\theta))^3 \frac{d^3 J(u_0)}{du^3} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Utilitzant les propietats trigonomètriques

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\ \cos^3 x &= \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos(3x)) \end{aligned}$$

obtenim que

$$\begin{aligned} &(h_0 + h_1 \cos(\beta\theta) + h_2 \cos(2\beta\theta) + h_3 \cos(3\beta\theta))^2 \\ &= \left(h_0^2 + \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2} + \frac{h_3^2}{2}\right) + (2h_0h_1 + h_1h_2 + h_2h_3) \cos(\beta\theta) + \\ &\quad + \left(\frac{h_1^2}{2} + h_1h_3 + 2h_0h_2\right) \cos(2\beta\theta) + (h_1h_2 + 2h_0h_3) \cos(3\beta\theta) + \dots \\ &(h_0 + h_1 \cos(\beta\theta) + h_2 \cos(2\beta\theta) + h_3 \cos(3\beta\theta))^3 \\ &= \left(h_0^3 + \dots + \frac{3h_1h_2h_3}{2}\right) + \left(\frac{3h_1^3}{4} + \dots + \frac{3h_3h_2^2}{4}\right) \cos(\beta\theta) + \\ &\quad + \left(3h_0^2h_2 + \dots + \frac{3h_2^2h_3}{2}\right) \cos(2\beta\theta) + \left(\frac{h_1^3}{4} + \dots + \frac{3h_2^2h_2}{2}\right) \cos(3\beta\theta) + \dots \end{aligned}$$

Equiparem els coeficients de l'equació (2.17) que pertanyen a la mateixa freqüència, mantenint només els termes més grans, en funció de l'ordre de  $h_1$ , aleshores

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{h_1^2}{4\beta^2} \frac{d^2 J(u_0)}{du^2} \\ h_2 &= -\frac{h_1^2}{12\beta^2} \frac{d^2 J(u_0)}{du^2} \\ h_3 &= -\frac{1}{8\beta^2} \left[ \frac{h_1h_2}{2} \frac{d^2 J(u_0)}{du^2} + \frac{h_1^3}{24} \frac{d^3 J(u_0)}{du^3} \right] \\ 0 &= \frac{2h_1h_0 + h_1h_2}{2} \frac{d^2 J(u_0)}{du^2} + \frac{h_1^3}{8} \frac{d^3 J(u_0)}{du^3} \end{aligned}$$

Combinant les equacions anteriors, tindrem una nova equació

$$0 = \frac{h_1^3}{24\beta^2} \left[ 3\beta^2 \frac{d^3 J(u_0)}{du^3} + 5 \left( \frac{d^2 J(u_0)}{du^2} \right)^2 \right]$$

Utilitzant l'equació (2.12) i les derivades de  $J(u)$  segons l'equació (2.16), aleshores

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J(u_0)}{du^2} &= -\frac{\beta^2(1-\beta^2)}{u_0} \\ \frac{d^3 J(u_0)}{du^3} &= \frac{\beta^2(1-\beta^2)(1+\beta^2)}{u_0^2} \end{aligned}$$

Substituint aquests valors en l'última equació, obtenim el resultat principal del teorema de Bertrand

$$\beta^2(1-\beta^2)(4-\beta^2) = 0$$

**Observació 2.20.** Si  $\beta = 0$ , tenim  $F(r) = \frac{k}{r^3}$ , aleshores  $\alpha = -3$ . Sabem que quan  $\alpha < -1$ , el cos escaparà a partir d'una certa energia.

Per tant, les úniques forces que generen òrbites tancades a qualsevol valor de l'energia  $E$  són la força gravitacional i la d'oscil·lador harmònic simple, corresponents a  $\beta^2 = 1$  i  $\beta^2 = 4$  respectivament.

$$\begin{aligned} \beta^2 = 1 &\longrightarrow F(r) = \frac{k}{r^2} \\ \beta^2 = 4 &\longrightarrow F(r) = kr \end{aligned}$$

### 3 Cas gravitatori

En el capítol anterior, hem estudiat les característiques generals del problema estès de dos cossos. Ara ens centrem al cas gravitatori on tenim  $k = GMm$  i  $\alpha = -2$ .

#### 3.1 Equació diferencial gravitatòria de les òrbites

En aquest cas podem trobar la solució de l'equació orbital. Reemplacem els valors de  $k$  i  $\alpha$  a l'equació polar de les òrbites (2.10) i obtenim en forma gravitatòria

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}$$

És una equació diferencial que pot rescriure's amb el canvi de variable  $v := \frac{du}{d\theta}$

$$\begin{cases} \frac{du}{d\theta} = v \\ \frac{dv}{d\theta} = -u + \frac{GMm^2}{L^2} \end{cases}$$

La solució homogènia de l'equació és

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta \\ -c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta \end{pmatrix}$$

on  $c_1$  i  $c_2$  són constants.

Per les propietats trigonomètriques, pot reescriure'l com

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cos(\theta - \theta_0) \\ -c \sin(\theta - \theta_0) \end{pmatrix}$$

amb  $c \cos \theta_0 = c_1$  i  $c \sin \theta_0 = c_2$ .

Observem que  $\frac{GMm^2}{L^2}$  és una solució particular de l'equació. Per tant, la solució general té la forma següent:

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2}(1 + e \cos(\theta - \theta_0)) \quad , \quad \text{on } c = \frac{GMm^2}{L^2}e$$

**Observació 3.1.** Trobem la relació de  $e$  amb  $E$  i  $L$  a partir de l'equació (2.8).

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^4} \left[ \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] - \frac{GMm}{r} \end{aligned}$$

Utilitzant el canvi de variable  $r = \frac{1}{u}$ , tenim que

$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2 u^4}{m} \left[ \frac{1}{u^4} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{u^2} \right] - GMmu$$

Calculat la derivada de  $u$  respecte  $\theta$ , resulta:

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{GMm^2}{L^2} e \sin(\theta - \theta_0)$$

Substituint l'equació de  $u$  i de  $\frac{du}{d\theta}$  a l'equació de l'energia  $E$ , obtenim que

$$\begin{aligned} E &= \frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} [e^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + (1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2] - \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2} e^2 - \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2} = \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

Per tant, l'excentricitat  $e$  es pot expressar com

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 m^3}}$$

## 3.2 Geometria de les òrbites

### 3.2.1 Forma i equacions en coordenades cartesianes

Un cop trobada la solució de l'equació diferencial, podem aconseguir l'equació de la trajectòria desfent el canvi de variable precedent

$$r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{L^2}{GMm^2} \frac{1}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (3.1)$$

on el paràmetre  $p$  està definit com

$$p := \frac{L^2}{GMm^2} \quad (3.2)$$

Observem que l'equació orbital en coordenades polars és l'equació focal d'una cònica d'excentricitat  $e$  i paràmetre  $p$ .

Segons la definició de  $p$ , l'energia total  $E$  es pot expressar com

$$E = \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{L^2} (e^2 - 1) = -\frac{GMm^2}{2p} (1 - e^2) \quad (3.3)$$

**Observació 3.2.** Les equacions de les còniques en coordenades cartesianes tenen expressions ben diferents i que es poden deduir a partir de l'equació focal.

Òrbita	Equació	Descripció
Circumferència	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	centrada al punt $(x_0, y_0)$ amb el radi $r$
El·lipse	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	centrat al punt $(x_0, y_0)$ distància focal és $2c$ amb $c^2 = a^2 - b^2$ on $a$ és el semieix major i $b$ el menor
Paràbola	$y^2 = 4qx$	$q$ és la distància de l'origen al focus
Hipèrbola	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	centrat al punt $(x_0, y_0)$ $a$ és la distància de l'origen a l'hipèrbola $c$ és la distància focal es compleix $b^2 = c^2 - a^2$

Taula 1: Forma de les còniques en cartesianes

**Observació 3.3.** Si definim l'angle  $\varphi := \theta - \theta_0$ , aleshores

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (3.4)$$

Per transformar les equacions en coordenades cartesianes, utilitzem les relacions  $x = r \cos \varphi$  i  $y = r \sin \varphi$  i, per tant,  $x^2 + y^2 = r^2$ . Reemplaçant l'equació (3.4) amb les relacions, es té:

$$\begin{aligned} r + ex &= p \\ r^2 &= (p - ex)^2 = x^2 + y^2 \\ (1 - e^2)x^2 + 2pex + y^2 &= p^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ara estudiem els comportaments i les propietats de les òrbites segons l'energia total i la trajectòria en funció de l'excentricitat  $e$ .

- $e = 0$

Substituint el valor de  $e$  a les equacions (3.3), (3.4) i (3.5), obtenim que

$$E = E_c = -\frac{GMm^2}{2p} = -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2}$$

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= p \\ x^2 + y^2 &= p^2 \end{aligned}$$

Observem que l'energia és negativa. D'acord amb l'equació, les trajectòries són circulars centrades a l'origen, en nostre cas és el Sol, amb radi  $p$ .

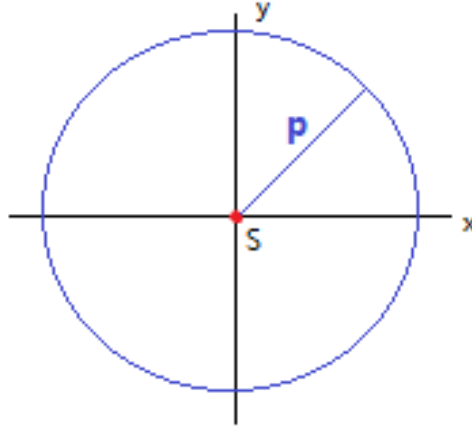


Figura 17: Circumferència centrada al Sol amb radi  $p$

- $0 < e < 1$

En aquest cas, observem que l'energia correspon també és negativa i major que la de la circumferència, ja que  $1 - e^2 > 0$ .

$$E_c < E_e = -\frac{GMm^2}{2p}(1 - e^2) < 0$$

Com que  $|\cos \varphi| \leq 1$ , tenim que

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} \quad \text{amb } \varphi = 0 \quad , \quad r_{max} = \frac{p}{1-e} \quad \text{amb } \varphi = \pi$$

Ara, sumant  $\frac{p^2 e^2}{1-e^2}$  als dos costats de l'equació (3.5), es transforma en

$$\begin{aligned} (1 - e^2)x^2 + 2pex + y^2 + \frac{p^2 e^2}{1 - e^2} &= p^2 + \frac{p^2 e^2}{1 - e^2} \\ (1 - e^2) \left( x^2 + \frac{2pex}{1 - e^2} + \frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2} \right) + y^2 &= \frac{p^2}{1 - e^2} \\ (1 - e^2) \left( x + \frac{pe}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= \frac{p^2}{1 - e^2} \end{aligned}$$

Si definim

$$a := \frac{p}{1 - e^2} \quad , \quad b := \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (3.6)$$

aleshores tenim que

$$(1 - e^2)(x + ae)^2 + y^2 = b^2$$

dividint  $b^2$  als dos costats:

$$\frac{(1 - e^2)}{b^2}(x + ae)^2 + \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

$$\frac{(1+e^2)^2}{p^2}(x+ae)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.7)$$

Tenim una el·lipse amb semieixos  $a = \frac{p}{1-e^2}$ ,  $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ , i centrada al punt  $(-ae, 0)$ .

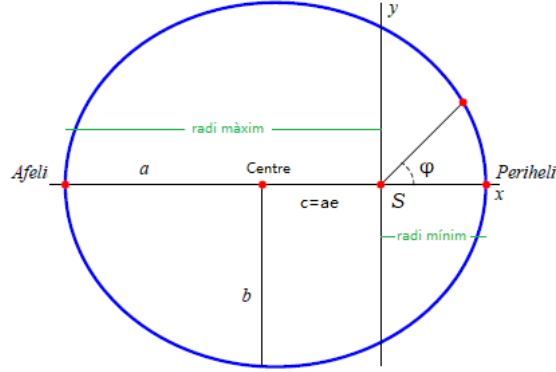


Figura 18: El·lipse centrada al punt  $(-ae, 0)$

**Observació 3.4.** Tenim la relació

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} \quad (3.8)$$

Sabem que l'excentricitat  $e$  determina el grau de desviació de la cònica respecte a una circumferència.

Si  $e \simeq 0$ , aleshores  $a \simeq b$  i l'el·lipse serà pràcticament una circumferència.

- $e = 1$

Quan substituïm  $e = 1$  a les equacions com abans, obtenim que

$$E = -\frac{GMm^2}{2p}(1-e^2) = 0$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$$

Observem que, en aquesta situació, el cos té energia nul·la i és capaç d'escapar, és a dir, la trajectòria va a l'infinit si  $\varphi = \pm\pi$ .

Així que  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{GMm}{r} = 0$ , i la velocitat d'escapament és nul·la.

$$E = \frac{1}{2}mv_{escap}^2 \Rightarrow v_{escap} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 0$$



I l'equació de l'òrbita en cartesianes té la forma

$$2px + y^2 = p^2$$

$$y^2 = p^2 - 2px = p(p - 2x)$$

Per tant les trajectòries són paràboles amb focus en el punt (0,0), és a dir, en el Sol.

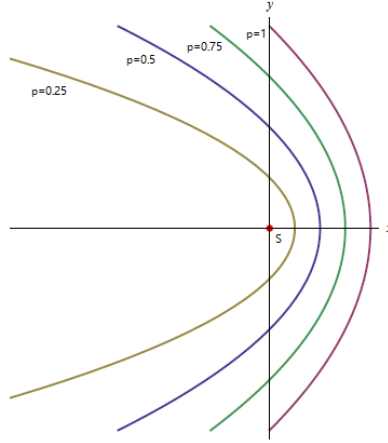


Figura 19: Parabòla amb el Sol situat al focus en funció de p

- $1 < e$

A causa de  $1 - e^2 < 0$ , doncs que

$$E = -\frac{GMm^2}{2p}(1 - e^2) > 0$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

En aquest cas, l'òrbita es pot escapar amb els valors de  $\varphi_{max}$  determinat per l'equació

$$e \cos \varphi_{max} = -1$$

Així, els angles  $\varphi$  estan confinats a  $(-\varphi_{max}, \varphi_{max})$ , i la velocitat d'escapament depèn de l'energia total

$$v_{escap} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Tenim l'equació d'òrbita (3.5) en coordenades cartesianes. Com que  $1 - e^2 < 0$ , aleshores de la manera semblat al cas  $0 < e < 1$ , podem reescriure'l com

$$\frac{(x - \zeta)^2}{\gamma^2} - \frac{y^2}{\delta^2} = 1$$

on

$$\gamma = \frac{p}{e^2 - 1} \quad , \quad \delta = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad \text{i} \quad \zeta = \gamma e$$

La trajectòria té la forma d'una hipèrbola. Les seves asímptotes són  $y = \frac{\delta}{\gamma}x$  i  $y = -\frac{\delta}{\gamma}x$  amb el centre  $(\zeta, 0)$ .

Observem que els focus de l'hipèrbola estan a la posició  $(0, \zeta - q)$  i  $(0, \zeta + q)$  amb  $q = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$ .

En particular,  $q = \frac{p}{e^2 - 1}e = \zeta$ , així que  $(0, \zeta - q) = (0, 0)$  que és la posició del Sol.

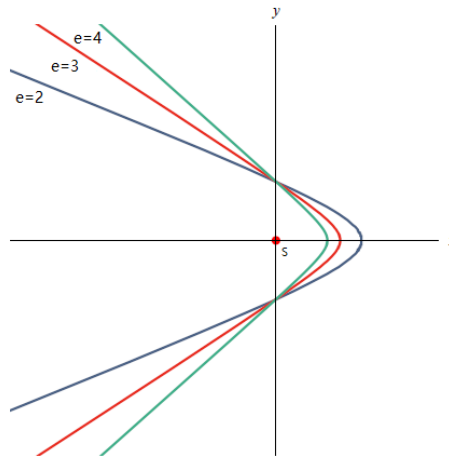


Figura 20: Hipèrbola amb els diferents valors de  $e > 1$

Finalment, sabem que les òrbites fitades són aquelles que té l'excentricitat  $e$  més petita estrictament que 1, cas en què el cos té una energia negativa i mai es pot alluyar a l'infinit. En canvi, amb les energies positives, quan més gran és l'energia més gran és la velocitat d'escapament, ja que la velocitat d'escapament és directament proporcional a l'arrel quadrada de l'energia.

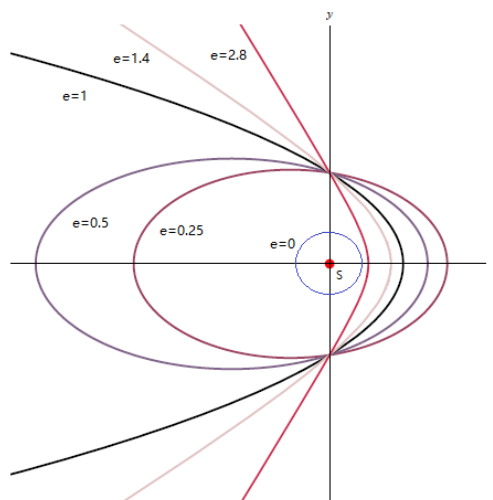


Figura 21: Comparació de les òrbites segons els valors d' $e$

### 3.2.2 Recorregut de l'òrbites el·líptiques

En l'apartat precedent hem vist que, quan  $e \geq 1$ , el cos es pot escapar a l'infinit. I en el cas d'una circumferència tal que  $e = 0$ , es manté el seu radi. Per tant, ara anem a enfocar al cas el·líptic.

Per a un el·lipse, tenim  $0 < e < 1$ . Com que  $r(\varphi)$  sempre està fitat per a tots els valors de  $\varphi$  i és una funció periòdica, les trajectòries són tancades.

Gràcies a les lleis de Kepler es pot analitzar el recorregut temporal de les òrbites el·líptiques.

Sigui  $A$  l'àrea escombrada pel radi vector format pel Sol i el planeta, aleshores tenim que la velocitat areolar d'escombrat de l'àrea és constant i val

$$K = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Sigui  $T$  el període del planeta, aleshores es verifica

$$TK = \Lambda$$

on  $\Lambda$  és l'àrea total de l'el·lipse,  $\Lambda = \pi ab$ .

Aleshores, es satisfà

$$T = \frac{\Lambda}{K} = \frac{2\pi abm}{L}$$

Per les equacions (3.2), (3.6) i (3.8), sabem que  $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1-e^2}$  i  $b = a\sqrt{1-e^2}$ , així que

$$T = \frac{2\pi ma^2\sqrt{1-e^2}}{L}$$

$$T^2 = 4\pi^2 m^2 \frac{a^4(1-e^2)}{L^2} = 4\pi^2 m^2 \frac{a^3 p}{L^2} = \frac{4\pi^2 m^2 a^3 \frac{L^2}{GMm^2}}{L^2} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

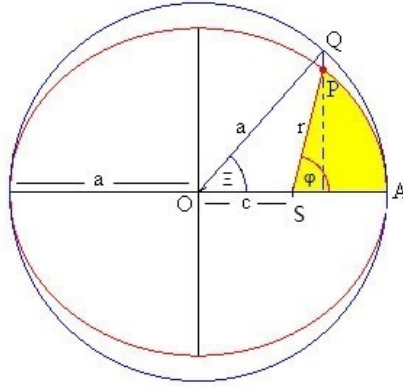
És el resultat de la tercera llei de Kepler, que conclou la proporcionalitat entre el quadrat del període  $T$  i el cub del semieix major  $a$  de l'el·lipse.

### 3.2.3 Equació de Kepler

Volem conèixer el recorregut del planeta en funció del temps, la qual cosa no és tant senzilla d'expressar. Només podem tenir idea sobre la seva anomalia excèntrica  $\Xi$ , la qual està relaciona el temps mitjançant l'equació de Kepler.

**Definició 3.5.** *L'anomalia excèntrica  $\Xi$  és l'angle mesurat des del centre de l'el·lipse, que forma la projecció del planeta sobre la circumferència principal i l'eix de l'el·lipse.*

**Observació 3.6.** Ara estudiem la relació entre l'anomalia excèntrica  $\Xi$  amb l'excentricitat  $e$  i l'angle corregut  $\varphi$  del planeta segons la Figura 22.



Tracem la trajectòria el·líptica de semieix major  $a$  i excentricitat  $e$  en color vermell i la circumferència principal de radi  $a$  en color blau. Observem que  $c = ae$  és la semidistància focal entre l'origen  $O$  i el focus  $S$  on situat el Sol.

Obtenim la relació geomètrica,  $a \cos \Xi = c + r \cos \varphi$ . I com que  $c = ae$ ,  $r = \frac{p}{1+e \cos \varphi}$  i  $p = a(1 - e^2)$ , doncs que

$$\begin{aligned} a \cos \Xi &= ae + \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi} \cos \varphi \\ \cos \Xi &= e + \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \varphi} \cos \varphi = \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} \\ \cos \varphi &= \frac{\cos \Xi - e}{1 - e \cos \Xi} \end{aligned}$$

Substituïm la igualtat de  $\cos \varphi$  a l'equació de  $r$ , tenim que

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi} = a(1 - e \cos \Xi)$$

Ara utilitzant la propietat geomètrica  $\tan^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ , trobem la relació

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\Xi}{2} &= \frac{1 - \cos \Xi}{1 + \cos \Xi} = \frac{1 - e}{1 + e} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{1 - e}{1 + e} \tan^2 \frac{\varphi}{2} \\ \tan \frac{\Xi}{2} &= \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\varphi}{2} \\ \Xi &= 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned}$$

**Definició 3.7.** *El moviment mitjà  $n$  és l'angle girat en la unitat de temps suposant moviment uniforme amb el període  $T$ . Ve donat per*

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

**Definició 3.8.** L'angle recorregut d'aquest planeta des del periheli movent-se amb velocitat angular constant  $n$  es defineix com anomalia mitjana

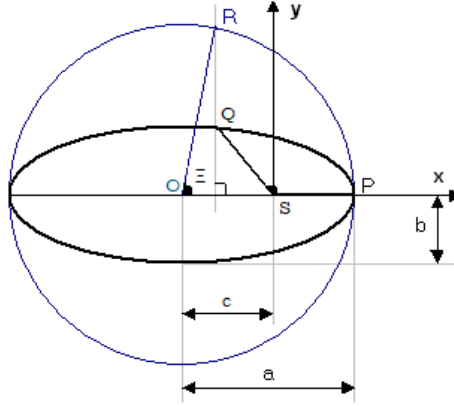
$$\mu = n(t - t_0) \quad , \quad \text{on } t_0 \text{ és l'instant de pas pel periheli}$$

**Proposició 3.9.** Si  $\Xi$  i  $\mu$  són l'anomalia excèntrica i l'anomalia mitjana respectivament, aleshores es verifica l'equació de Kepler

$$\mu = \Xi - e \sin \Xi$$

*Demostració.* Es fa servir que el planeta realitza un moviment circular i uniforme amb un període  $T$  sobre la circumferència de radi  $a$ .

Sigui  $t_0$  el moment que el planeta està en el periheli  $P$ . Definim  $\tau := t - t_0$  com el temps que triga el planeta a assolir la posició  $Q$ . Pel punt  $Q$  tracem al punt corresponent  $R$  en la circumferència principal de radi  $a$ .



Observem que la circumferència principal té una relació d'afinitat entre les seves ordenades i les ordenades de l'el·lipse, ja que són més grans en un factor  $\frac{a}{b}$ , així que

$$A_{PSR} = \frac{a}{b} A_{PSQ}$$

on  $A_{PSQ}$  és l'àrea escombrat en el temps  $\tau$  de l'el·lipse, tal que  $A_{PSQ} = \frac{\tau}{T} \pi ab$ .

Per tant, tenim que

$$A_{PSR} = \frac{\tau}{T} \pi a^2$$

Ara bé, també tenim

$$A_{PSR} = A_{POR} - A_{SOR}$$

on  $A_{POR}$  és el sector circular amb l'anomalia excèntrica  $\Xi$  que té una àrea total  $\pi a^2$  i la fracció és  $\frac{\Xi}{2\pi}$ , així que

$$A_{POR} = \pi a^2 \frac{\Xi}{2\pi} = \frac{a^2}{2} \Xi$$

Com que  $SOR$  és un triangle amb la longitud  $c = ae$  i l'alçada  $a \sin \Xi$ , doncs

$$A_{SOR} = \frac{a^2 e \sin \Xi}{2}$$

Combinant les equacions anteriors, obtenim la igualtat

$$\begin{aligned} A_{PSR} &= \frac{\tau}{T} \pi a^2 = \frac{a^2}{2} \Xi - \frac{a^2}{2} e \sin \Xi \\ \frac{2\pi}{T} \tau &= \Xi - e \sin \Xi \end{aligned}$$

Finalment segons les definicions, aconseguim l'equació de Kepler

$$\mu = n\tau = n(t - t_0) = \Xi - e \sin \Xi$$

□

## 4 Simulació del problema de dos cossos

En els capítols anteriors, hem estudiat el problema estès de dos cossos teòricament. Es coneix la forma cònica de les òrbites del cas gravitatori.

Per estudiar els comportaments de les òrbites del cas no gravitatori, utilitzarem un simulador que visualitza les òrbites a partir d'una situació inicial.

### 4.1 Descripció del simulador

L'aplicació del simulador del problema estès de dos cossos té dues parts.

La part esquerra es forma per dos blocs. En el bloc superior podem trobar controls de perspectiva i dels variables importants, l'exponent  $\alpha$  i la velocitat. I en el bloc inferior hi han monitors dels valors de les magnituds principals. Però no tots d'ells existeixen. Podem trobar l'energia total, el moment angular, la velocitat i la distància corresponents en cada moment. També la longitud i la latitud de la perspectiva. En canvi, el semieix major, l'excentricitat i el període només visualitzem en el cas gravitatori. I la part dreta simplement visualitza els comportaments de les òrbites depenent de les variables.

Utilitzant el botó esquerra del ratolí podem canviar la perspectiva. A més, podem modificar la proximitat amb els botons de “Zoom” o les tecles “a/A”, i per canviar la velocitat de la partícula a part dels botons de “Speed” també podem utilitzar les tecles “v/V”.

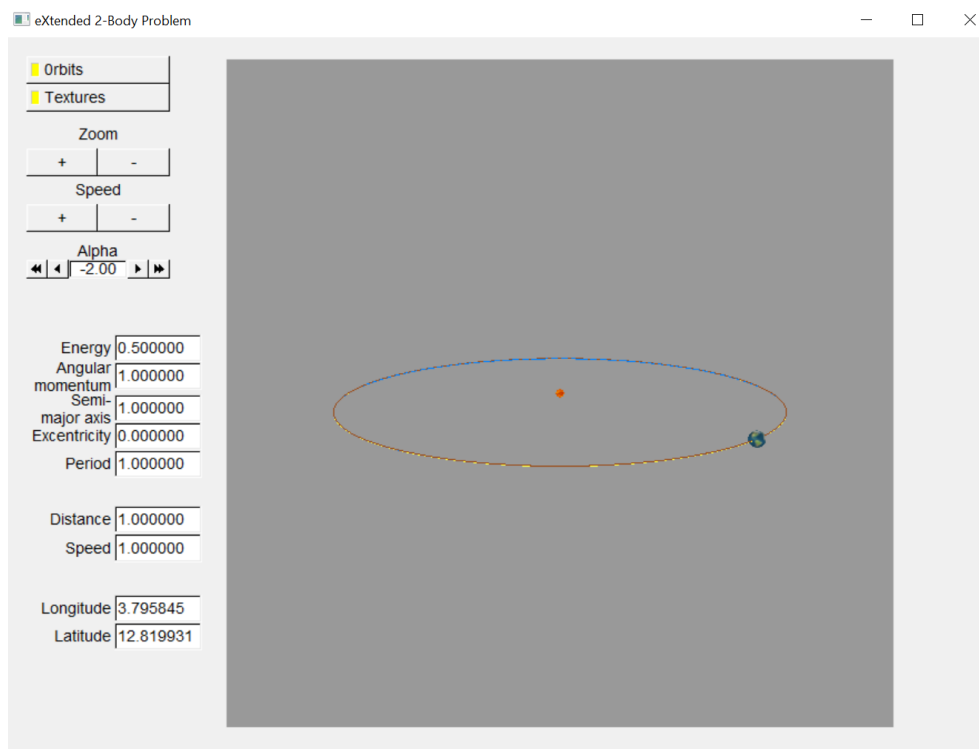


Figura 22: Inici del simulador amb òrbites i textures

A part de la visualització, el simulador també ens permet realitzar comparacions entre els resultats analítics i teòrics. Variant els valors de  $\alpha$  i la velocitat, podem trobar tots els tipus d'òrbites que hem estudiat anteriorment.

Observem que, un cop donat les condicions inicials, l'energia i el moment angular es mantenen constants. Això és, es verifiquen les dues lleis de conservació que hem estudiat anteriorment.

A més, ens fixem que només quan  $\alpha = -2$  tenim l'òrbita completa, és a dir, la cònica correspon a la posició i velocitat, sempre que es facin canvis sobre les velocitats.

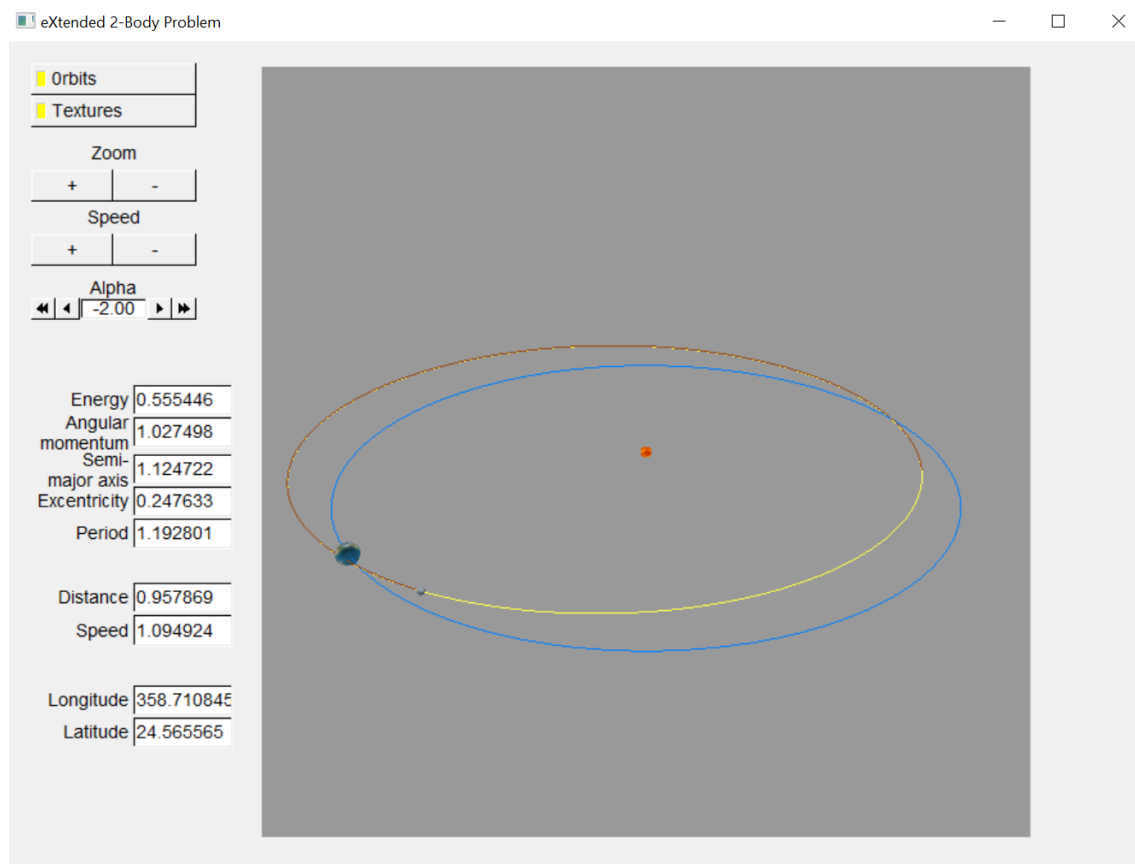


Figura 23:  $\alpha = -2$



En el cas gravitatori, també ens permet comprovar la tercera llei de Kepler que proporciona la relació entre el període i el semieix major.

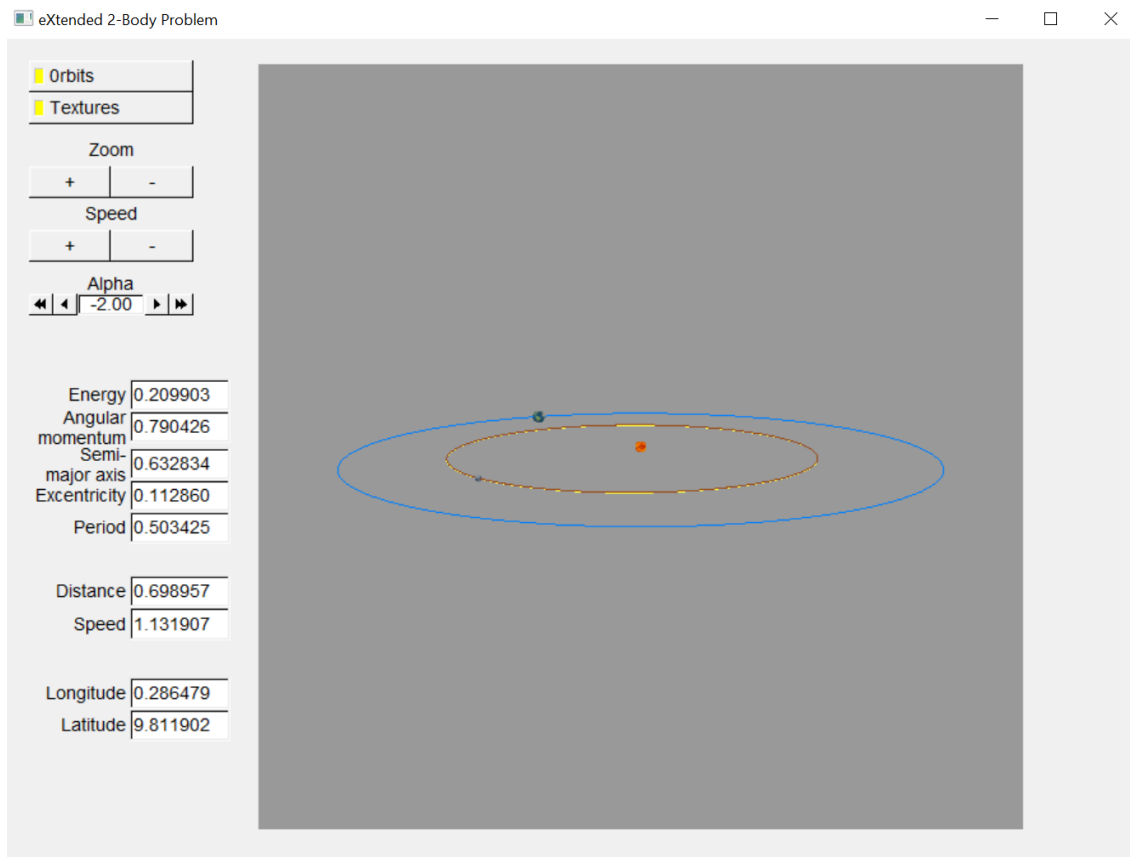


Figura 24: Comprovació de la tercera llei de Kepler

A l'inici tenim el període  $T_1 = 1$  i el semieix major  $a_1 = 1$ . Sigui  $T_2 = 0.503425$ .

Observem que

$$\frac{a_2^3}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2} = T_2^2 = (0.503425)^2$$

Aleshores

$$\frac{a_2}{a_1} = T_2^{\frac{2}{3}} = (0.503425)^{\frac{2}{3}} = 0.632834$$

Per tant, es verifica la tercera llei de Kepler.

També podem comprovar el teorema de Bertrand amb el simulador. Quan  $\alpha = 1$ , correspon a l'oscil·lador harmònic simple, sempre produeix òrbites tancades com el cas gravitatori.

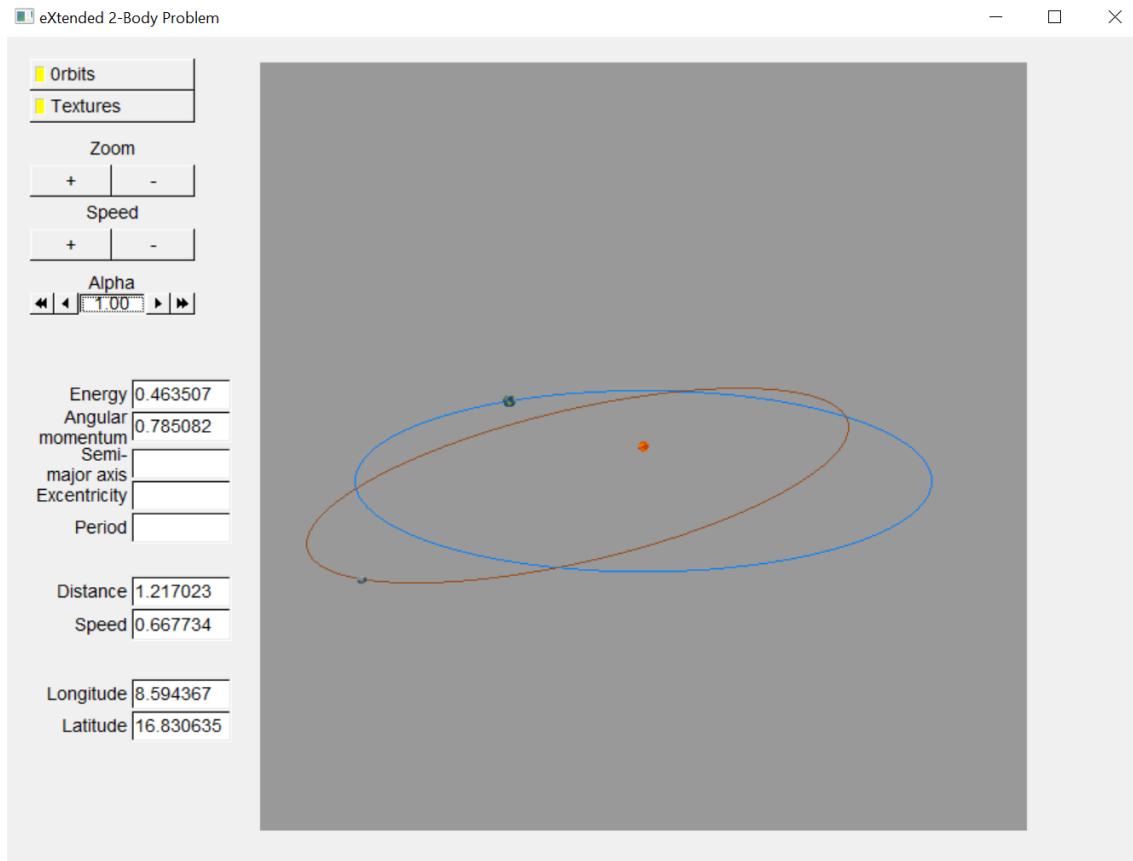


Figura 25:  $\alpha = 1$

És fàcil comprovar el cas  $L \neq 0$ . Si  $\alpha \geq -1$ , aleshores totes les òrbites estan fitades. La majoria de les òrbites són denses en un anell de forma diferent.

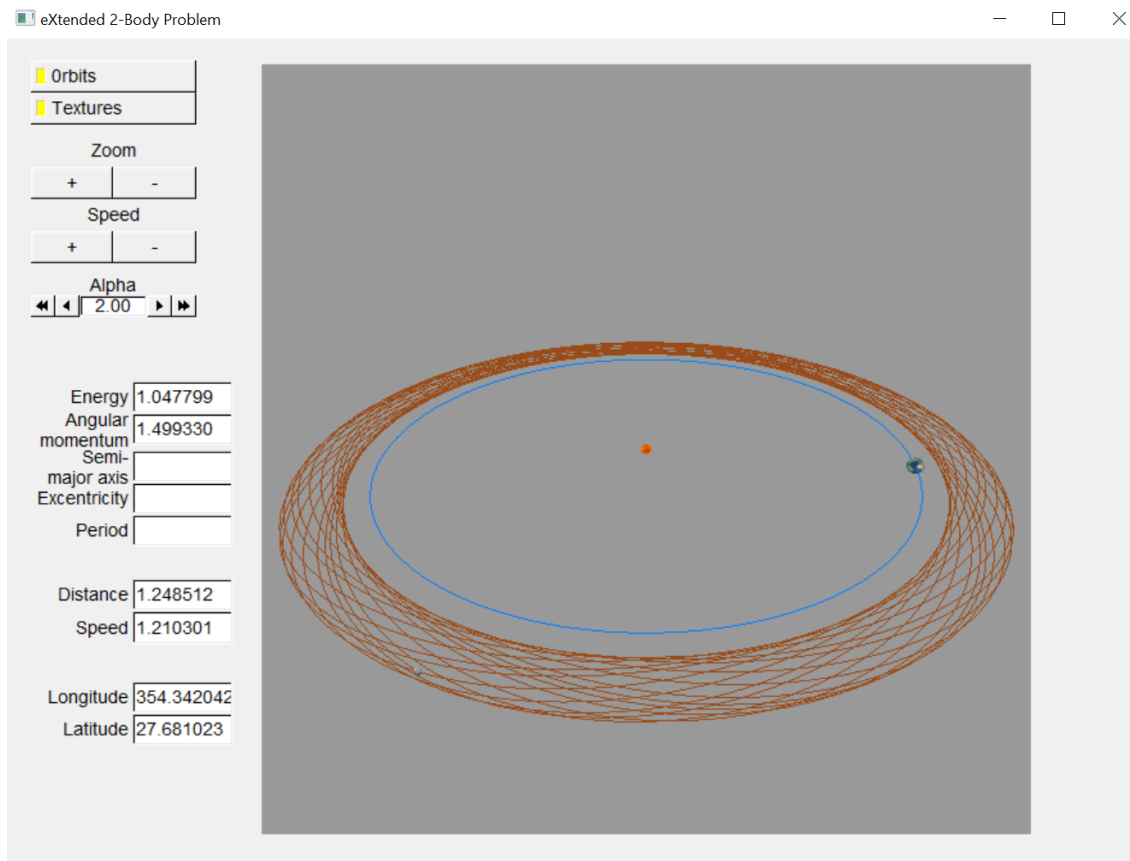


Figura 26:  $\alpha = 2$

Per la part teòrica, si  $\alpha < -1$ , un cop l'energia  $E$  superi el valor de  $-\frac{1}{\alpha+1}$ , el cos escaparà a l'infinit.

Podem comprovar-lo amb el cas gravitatori. Sigui  $\alpha = -2$ , observem que quan l'energia  $E \geq -\frac{1}{\alpha+1} = 1$ , aleshores l'òrbita de la cònica és una hipèrbola tal que la partícula escaparà cap a l'infinit.

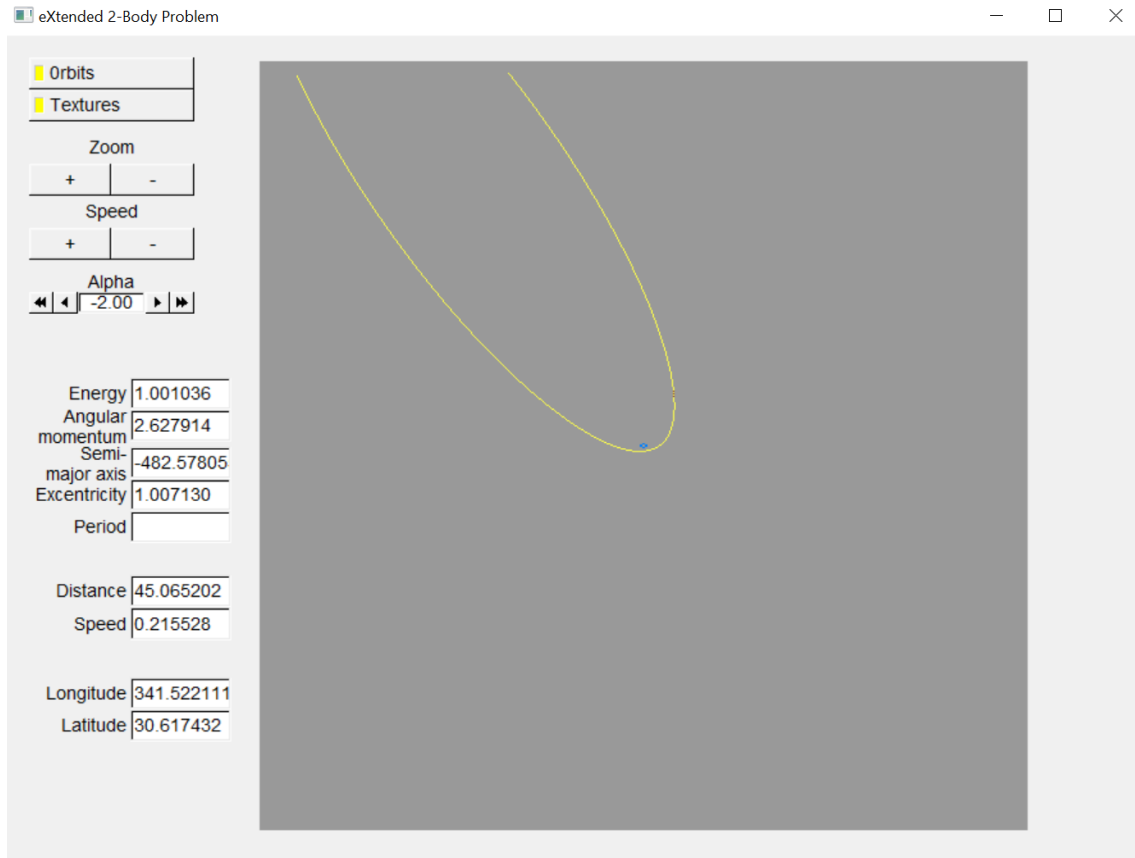


Figura 27: El cos escaparà amb  $E = 1.001036$  quan  $\alpha = -2$

## 5 Conclusions

Després d'aquest treball ja sóc capaç de resoldre els dubtes mencionats al principi. Els planetes giren al voltant del Sol degut a la seva gravetat. A causa de la conservació del moment angular dels planetes, es realitzen moviments en el pla. També entenem que els planetes no facin òrbites qualssevol, sinó el·líptiques. A més, podem calcular el període dels planetes segons la tercera llei de Kepler que introdueix la relació entre el seu període i el seu semieix major. Així, com que Mercuri està més proper al Sol, triga menys temps a fer una volta entera. En canvi, Neptú triga molt més temps.

També hem assolit alguns resultats sobre el problema estès. Depenent del valor de  $\alpha$ , els cossos tenen comportaments molt diferents i possibilitats de col·lisionar o escapar. A més, pel teorema de Bertrand sabem que els únics casos que produeixen sempre òrbites tancades i tancades són el gravitatori i l'oscil·lador harmònic simple.

He intentat aclarir tots els procediments pas a pas per les persones que llegeixen aquest treball poguessin entendre-lo.

El desenvolupament d'aquesta memòria m'ha ajudat a aprofundir els meus coneixements de física i de matemàtiques. A més a més, aquest treball m'ha permès ampliar la meua visió de l'Astronomia.

## 6 Bibliografia

### Referències

- [1] Goldstein, H.: *Mecánica clásica*, 1987.
- [2] Arnold, V. I.: *Mecánica clásica métodos matemáticos*, 1983.
- [3] Blasco Sánchez, Carmen: *Simulación de problemas de dos cuerpos con finalidades didácticas*, 2016
- [4] Llorente Trillo, Bárbara, *Simulació i visualització gràfica en problemes de mecànica celeste*, 2014
- [5] Alamañac, Garrido, Rafael Juan, *El problema de dos cuerpos y las leyes de Kepler*, 2016
- [6] <https://www.artehistoria.com/es/contexto/revolucion-astronomica>
- [7] <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/celeste/kepler/kepler.html>
- [8] <https://el-sistema-solar.com/caracteristicas-y-movimientos-de-los-planetes/>
- [9] <https://sites.google.com/a/xtec.cat/tecnologiaindustrial2/u2-estatica/2-2-centre-de-masses> <http://e-ducativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/3000/3227/html/12-conservacin-del-momento-angular.html>